Testaufgabe zum Bereich

Mithilfe einer stationären Verteilung den Fixvektor (langfristige Verteilung) bestimmen und seine Bedeutung bzgl. des Sachzusammenhangs interpretieren

Selbsteinschätzung *vor* der Bearbeitung der Testaufgabe:

Bitte kreuzen Sie an:

Ich kann	**sicher**	**ziemlich sicher**	**unsicher**	**sehr unsicher**	**Ich habe für diesen Bereich gearbeitet**			
					gar nicht weil ich das schon konnte	**ein wenig**	**recht viel**	**ausgesprochen intensiv**
mithilfe einer stationären Verteilung den Fixvektor (langfristige Verteilung) bestimmen und seine Bedeutung bzgl. des Sachzusammenhangs interpretieren.								

Aufgabenstellung:

Die Zahnpastamarken ADent, BDent und CDent beherrschen den Markt. Die Kunden wechseln jedoch bei jedem Kauf die Marke, wie die folgende Tabelle angibt.

von / nach	ADent	BDent	CDent
ADent	**0%**	**30%**	**50%**
BDent	**60%**	**0%**	**50%**
CDent	**40%**	**70%**	**0%**

a) *Stellen Sie die Übergangsmatrix für diesen Austauschprozess auf.*

b) ADent wird zu einem bestimmten Zeitpunkt von 100 Personen, BDent von 150 und CDent von 200 Personen benutzt.
Berechnen Sie die Verteilung beim nächsten Einkauf.

c) *Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung für 454 Kunden.*

Selbsteinschätzung **<u>nach</u>** der Bearbeitung und dem Vergleich der Lösungen.
Bitte kreuzen Sie an:

Ich kann	sicher	ziemlich sicher	unsicher	sehr unsicher	Meine Selbsteinschätzung war richtig			
					stimmt	stimmt teilweise	stimmt eher nicht	Stimmt gar nicht
mithilfe einer stationären Verteilung den Fixvektor (langfristige Verteilung) bestimmen und seine Bedeutung bzgl. des Sachzusammenhangs interpretieren								

Mein Fazit zur Aufgabe und zu meiner Selbsteinschätzung:

mithilfe einer stationären Verteilung den Fixvektor (langfristige Verteilung) bestimmen und seine Bedeutung bzgl. des Sachzusammenhangs interpretieren.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45+100 \\ 60+100 \\ 40+105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 \\ 160 \\ 145 \end{pmatrix}$

c) Stationäre Verteilung bzw. Gleichgewichtsverteilung bedeutet:

Es muss gelten: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Aus der MatrixVektor-Schreibweise ergibt sich folgendes LGS:

$0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = x_1 \quad | -x_1$

$0{,}6x_1 + 0{,}5x_3 = x_2 \quad | -x_2$

$0{,}4x_1 + 0{,}7x_2 = x_3 \quad | -x_3$

I. $-x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = 0 \quad | \cdot 0{,}6 \quad | \cdot 0{,}4$

II. $0{,}6x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 = 0$

III. $0{,}4x_1 + 0{,}7x_2 - x_3 = 0$

I. $-x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = 0$

II. $-0{,}82x_2 + 0{,}8x_3 = 0$

III. $0{,}82x_2 - 0{,}8x_3 = 0$

I. $-x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = 0$

II. $-0{,}82x_2 + 0{,}8x_3 = 0$

III. $0 = 0$

Das in Stufenform gebrachte LGS enthält weniger Gleichungen als Variablen. Daher hat das LGS unendlich viele Lösungen.

Wähle $x_3 = t$ und setze x_3 in II. ein, dann gilt:

$-0{,}82x_2 + 0{,}8t = 0 \quad | -0{,}8t$

$-0{,}82x_2 = -0{,}8t \quad | :(-0{,}82)$

$x_2 = \frac{0{,}8}{0{,}82} t \quad (*)$

Setze x_3 und x_2 in I. ein:

$-x_1 + 0{,}3 \cdot \frac{0{,}8}{0{,}82} t + 0{,}5t = 0$

$-x_1 + 0{,}3 \cdot \frac{80}{82} t + \frac{5}{10} t = 0$

$-x_1 + \frac{65}{82} t = 0 \quad | -\frac{65}{82} t$

$-x_1 = -\frac{65}{82} t \quad | \cdot(-1)$

$x_1 = \frac{65}{82} t \quad (**)$

Es muss gelten: $x_1 + x_2 + x_3 = 454 \quad (***)$

Setze x_1, x_2 und x_3 in die Gleichung (***) ein:

$\frac{65}{82} t + \frac{80}{82} t + t = 454$

$2\frac{63}{82}t = 454 \quad |: 2\frac{63}{82}$

$t = 164$

Setze t = 164 in (*) ein:

$x_2 = \frac{0,8}{0,82} \cdot 164 = 160$

Setze t = 164 in (**) ein:

$x_1 = \frac{65}{82} \cdot 164 = 130$

Kaufen 130 Personen ADent, 160 Personen BDent und 164 Personen CDent benutzen ergibt sich bei jedem Kauf dieselbe Anzahl von Verkäufen der einzelnen Marken.

<u>Alternative:</u>

Notiere auch die vierte Gleichung, so ergibt sich folgendes LGS:

I. $-x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 = 0$

II. $0,6x_1 - x_2 + 0,5x_3 = 0$

III. $0,4x_1 + 0,7x_2 - x_3 = 0$

IV. $x_1 + x_2 + x_3 = 454$

Durch Äquivalenzumformungen ergibt sich:

I. $-x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 = 0$

II. $-0,82x_2 + 0,8x_3 = 0$

III. $0 = 0$

IV. $x_1 + x_2 + x_3 = 454$

Nun wird das folgende LGS betrachtet:

I. $-x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 = 0$

II. $-0,82x_2 + 0,8x_3 = 0$

IV. $x_1 + x_2 + x_3 = 454$

Mithilfe des GTR ergibt sich dann folgende Lösung:

$x_1 = 130$, $x_2 = 160$ und $x_3 = 164$